
Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

Aufgabenzettel Nr. 9

Abgabe am Freitag, den 15.12.17 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Geschwindigkeitsverteilung mit maximaler Entropie (7 Pkt.)

Betrachten Sie die Geschwindigkeit $v \in (-\infty, \infty)$ eines freien Teilchens in einer Dimension.

- i.) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_1(v)$ nach dem Prinzip der maximalen Entropie unter der Nebenbedingung, dass die mittlere Geschwindigkeit $\langle |v| \rangle = v_0$ vorgegeben sei. (3 Pkt.)
- ii.) Bestimmen Sie nun die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_2(v)$ unter der Nebenbedingung, dass die mittlere kinetische Energie $\langle E \rangle = \langle \frac{1}{2}mv^2 \rangle = \frac{1}{2}mv_0^2$ vorgegeben sei. (3 Pkt.)
- iii.) Welche der beiden Nebenbedingungen enthält mehr Information über die Geschwindigkeit? Geben Sie die Informationsdifferenz in "bit" an, d.h. $I_2 - I_1 = \frac{1}{\ln 2} (\langle \ln p_1 \rangle - \langle \ln p_2 \rangle)$. (1 Pkt.)

Aufgabe 2: Der Taschenspieler (6 Pkt.)

Ein Taschenspieler möchte einen Würfel so präparieren, dass die \square mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{5}$ fällt. Damit seine Opfer nichts bemerken, soll der Mittelwert der geworfenen Augen mit dem eines normalen Würfels übereinstimmen und die Unkenntnis über das Ergebnis eines Wurfes möglichst groß sein.

- i.) Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung muss er für die übrigen Zahlen wählen? (5 Pkt.)
Hinweis 1: Maximieren Sie die Entropie unter Nebenbedingungen mithilfe der Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Wie viele Nebenbedingungen gibt es und wie sehen diese aus?
Hinweis 2: Nach der Maximierung bekommt man für die Wahrscheinlichkeiten einen Ausdruck der Form $p(n) = Ax^n$, wobei A und x von den Nebenbedingungen abhängen und $n = \square, \dots, \square$ ist. Dies führt auf Gleichungen, die numerisch gelöst werden sollen, z.B. mittels eines Newton-Verfahrens.
- ii.) Wie groß ist der Informationsvorsprung? Geben Sie diesen in "bit" an. (1 Pkt.)

Aufgabe 3: Entropie harmonischer Quantenoszillatoren (6 Pkt.)

Berechnen Sie die Entropie S und Temperatur T für die Gesamtheit von N dreidimensionalen harmonischen Quantenoszillatoren. Hierbei sei $N \gg 1$, alle Oszillatoren haben die gleiche Frequenz ω und die Gesamtenergie E sei fest vorgegeben.

Hinweis: Berechnen Sie die Gesamtzahl der Realisierungen Ω , indem Sie die Quantenzustände auf $3N$ unterscheidbare "Kästen", die aneinandergereiht durch $3N - 1$ Zwischenwände verbunden sind, verteilen. Nähern Sie die Entropie für große N .

Münsteraufgabe

Auf der historischen Abbildung des Münsters neben dem Schaufenster der Hof-Apotheke, Ecke Kaiser-Joseph-/Münsterstraße, sieht man, dass vier Stufen zum Hauptportal des Münsters hinaufführten. Warum ist es heute nur noch eine?