Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

Aufgabenzettel Nr. 8

Abgabe am Freitag, den 8.12.17 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Teilvolumina **(4 Pkt.)**

Ein Volumen V mit N Teilchen eines idealen Gases sei durch eine virtuelle Trennwand in zwei Teilvolmina V_1 und V_2 unterteilt. Sei p die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein gegebenes Teilchen in V_1 befindet und $W_N(n)$ die Wahrscheinlichkeit, dass sich genau n Teilchen in V_1 befinden:

$$W_N(n) = \binom{N}{n} p^n (1-p)^{N-n}.$$

i.) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\langle n^k \rangle = \left[(p\partial_p)^k (p+q)^N \right]_{q=1-p}.$$

Hinweis: $(p+q)^N = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} p^n q^{N-n}$. **(2 Pkt.)**

ii.) Berechnen Sie $\langle n \rangle$, $\langle n^2 \rangle$ und die Varianz $\mathrm{var}(n) = \langle (n - \langle n \rangle)^2 \rangle$. **(2 Pkt.)**

Aufgabe 2: Random Walk **(6 Pkt.)**

Betrachten Sie einen Random Walk in einer Dimension, wobei die Schritte $s_i = \pm l$ jeweils nach der Zeit Δt erfolgen. Die Wahrscheinlichkeit für die beiden Richtungen, rechts und links, soll dabei zunächst gleich sein. Im Weiteren sei $x = \sum_i s_i$ die Entfernung vom Ausgangspunkt und $N = \frac{t}{\Delta t} \gg 1$ die Anzahl der Schritte.

i.) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung der dimensionslosen Entfernung $\xi = \frac{x}{l}$ nach N Schritten durch

$$P(\xi, N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(N)}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2(N)}}$$

mit $\sigma^2(N) = N$ gegeben ist. Überführen Sie $P(\xi, N)$ in $P(x,t)$. **(1 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie, dass P die Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x,t)}{\partial x^2}$$

erfüllt und bestimmen Sie D. **(2 Pkt.)**

iii.) Die Wahrscheinlichkeit $p_{r/l}$ für Schritte nach rechts und links sei nun asymmetrisch, d.h. $p_r \neq p_l$. Leiten Sie die abgewandelte Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(x,t)$ mit ihrer zugehörigen Diffusionsgleichung her. **(3 Pkt.)**

Aufgabe 3: Phasenraumzelle **(4 Pkt.)**

Betrachten Sie ein Teilchen in einem eindimensionalen Kasten der Länge L.

i.) Behandeln Sie das System quantenmechanisch: Geben Sie die Anzahl der Zustände $n_{\mathrm{qm}}(E_{\mathrm{max}})$ für Energien $E \leq E_{\mathrm{max}}$ an. **(2 Pkt.)**

ii.) Behandeln Sie das System klassisch: Geben Sie die Anzahl der Zustände $n_{\text{klass}}(E_{\max})$ für Energien $E \leq E_{\max}$ an. Bestimmen Sie dazu zunächst das Phasenraumvolumen $\omega(E_{\max})$, das von Zuständen mit $E \leq E_{\max}$ eingenommen wird. Nutzen Sie den Zusammenhang $n_{\text{klass}} = \omega(E_{\max})/\omega_0$, wobei ω_0 die Größe einer Phasenraumzelle bezeichnet. Bestimmen Sie ω_0 aus der Näherung $n_{\text{klass}} \approx n_{\text{qm}}$ für große $E_{\max}$. **(2 Pkt.)**

Aufgabe 4: Chaos (Computerübung) **(6 Pkt.)**

Betrachten Sie die logistische Gleichung

$$x(t+1) = r \cdot x(t)\big(1 - x(t)\big)$$

mit $t \in \mathbb{N}$ für die drei Werte $r = 2$, 3.5 und 4.

i.) Tragen Sie die Zeitreihen $x(t, x_0)$ für $t \in [0, 100]$ und $x(0) = x_0 = 0.3$ auf. Lesen Sie die Anzahl der Häufungspunkte der Zeitreihen aus den Grafiken ab. **(2 Pkt.)**

ii.) Wie ändern sich die $x(t)$ bei einer kleinen Änderung der Startwerte? Tragen Sie hierfür die Differenzen $x(t, x_0) - x(t, x_0 + \delta)$ für $x_0 = 0.3$ und $\delta = 10^{-3}$, 10^{-6} und 10^{-12} auf. **(2 Pkt.)**

iii.) Betrachen Sie nun die Autokovarianzfunktion der Zeitreihen. Diese ist gegeben durch

$$\text{acf}(\tau) = \sum_{t=0}^{N-\tau} \big(x(t+\tau) - \mu\big)\big(x(t) - \mu\big)$$

wobei μ der Mittelwert der Zeitreihe ist. Plotten Sie die Autokovarianzfunktion für $r = 3.5$ und 4, $\tau \in [0, 100]$ und $x_0 = 0.3$. Welche qualitativen Unterschiede stellen Sie fest? *Hinweis:* Berechnen Sie die Zeitreihen in einem größeren t-Bereich, so dass $N \gg \tau$. **(2 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Der Vorbau an der südlichen Seite stammt erst aus der Renaissance. Wie hängt dieser Umstand mit der Reformation, der Gegenreformation und Erasmus von Rotterdam zusammen?