# Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

## Aufgabenzettel Nr. 7

Abgabe am Freitag, den 1.12.17 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

---

### Aufgabe 1: Stirlingsche Nährung **(6 Pkt.)**

Zeigen Sie, dass die Stirlingsche Nährung

$$\log(n!) \approx n \log(n) - n \tag{1}$$

für große $n$ gilt.

i.) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} \mathrm{d}x$$

für $n = 0, 1, 2, ...$ gilt. **(2 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie, dass

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

für $n \gg 1$ gilt. *Hinweis:* Führen Sie eine Taylorentwicklung von $\log f(x)$ mit $f(x) = x^n e^{-x}$ um das Maximum von $f(x)$ durch und nutzen Sie Ihr Wissen über die Normierung der Gaußverteilung. **(2 Pkt.)**

iii.) Leiten Sie aus dem Ergebnis von ii.) die Nährung (1) her. Wie groß ist der relative Fehler der Näherung für $n = 10$, $n = 100$ und $n = 1000$? **(2 Pkt.)**

### Aufgabe 2: Maximum-Likelihood-Schätzer **(6 Pkt.)**

Sei $\theta \in U \subseteq \mathbb{R}^p$ ein Parameter und $\phi_\theta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für jeden Wert von $\theta$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte der Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$. Dann heißt

$$L : U \ni \theta \longmapsto \phi_\theta(x_1, \ldots, x_n)$$

die *Likelihood-Funktion* für die Realisierung $\{x_1, \ldots, x_n\}$ der Zufallsvariablen. Entsprechend bezeichnet $l(\theta) = -\ln L(\theta)$ die *Log-Likelihood-Funktion.* Ist $L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in U} L(\theta)$, so heißt $\hat{\theta} \in U$ ein *Maximum-Likelihood-Schätzer* der Realisierung.
Gehen Sie nun von einer poissonverteilten Zufallsgröße $X$ aus, d.h.

$$\phi_\lambda(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

mit dem Parameter $\lambda$ und möglichen Realisierungen $k = 0, 1, 2, \ldots$ von $X$. Nach $n$ unabhängigen Wiederholungen des Zufallsexperiments erhält man die Realisierungen $\{k_1, \ldots, k_n\}$.

i.) Berechnen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$ der Realisierung. Warum ist $\hat{\lambda}$ selbst wieder eine Zufallsvariable? *Hinweis:* Benutzen Sie zur Bestimmung von $\hat{\lambda}$ die Log-Likelihood-Funktion. **(3 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie, dass $\hat{\lambda}$ erwartungstreu ist, d.h. $\langle \hat{\lambda} \rangle = \lambda$ **(1 Pkt.)**

iii.) Zeigen Sie, dass folgende Beziehungen gelten: **(2 Pkt.)**

$$\mathrm{Var}(\hat{\lambda}) = \frac{1}{n} \mathrm{Var(X)} = \left\langle \frac{\mathrm{d}^2 l(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda^2} \right\rangle^{-1}.$$

## Aufgabe 3: Übergänge zwischen Verteilungen **(7 Pkt.)**

Gegeben seien die folgenden Verteilungen

$$\begin{aligned} B_{p,n}(k) &= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && \text{(Binomialverteilung)} \\ P_\lambda(k) &= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} && \text{(Poissonverteilung)} \\ G_{\mu,\sigma}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} && \text{(Normalverteilung)} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass

i.) für $X_1 \sim B_{p,n_1}$ und $X_2 \sim B_{p,n_2}$ die Summe $X_1 + X_2 \sim B_{p,n_1+n_2}$ binomialverteilt ist **(2 Pkt.)**
*Hinweis:* Vandermonde'sche Identität

ii.) für $X_1 \sim P_{\lambda_1}$ und $X_2 \sim P_{\lambda_2}$ die Summe $X_1 + X_2 \sim P_{\lambda_1+\lambda_2}$ poissonverteilt ist **(2 Pkt.)**
*Hinweis:* Binomischer Lehrsatz

iii.) die Binomialverteilung für $n \to \infty$, $p \to 0$ und $np = \lambda$ in die Poissonverteilung übergeht. **(2 Pkt.)** *Hinweis:* $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$

Warum folgt aus den Teilen i.) und ii.), dass

iv.) sowohl die Binomialverteilung (für $n \to \infty$) als auch die Poissonverteilung (für $\lambda \to \infty$) in die Normalverteilung übergehen? **(1 Pkt.)**

## Aufgabe 4: Zentraler Grenzwertsatz (Computerübung) (8 Extrapunkte)

Betrachten Sie die normierte Summe von $N$ gleichverteilten Zufallsvariablen $X_i$ im Intervall $[-a, a]$:

$$S_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} X_i$$

i.) Wie müssen Sie $a$ wählen, so dass $\sigma^2_{X_i} = 1$? Setzen Sie $a$ im Folgenden auf diesen Wert fest. **(1 Pkt.)**

ii.) Erzeugen Sie Realisierungen von $S_N$ für $N = 2$ und $N = 5$: Nutzen Sie einen Zufallszahlengenerator, um $N$ gleichverteilte Zufallszahlen aus $[-a, a]$ zu ziehen, summieren Sie diese auf und normieren Sie die Summe mit $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Wiederholen Sie diese Prozedur je $10^5$ mal und stellen Sie das Ergebnis als Histogramm dar. **(3 Pkt.)**

iii.) Vergleichen Sie die gewonnenen Verteilungen mit der Standardnormalverteilung $N(0, 1)$. Plotten Sie die Normalverteilung dazu gemeinsam mit den Histogrammen aus ii.) und beachten Sie, dass Sie entweder die Histogramme normieren oder die Normalverteilung umskalieren müssen. **(2 Pkt.)**

iv.) Betrachten Sie nun Zufallsvariablen $Z_i = X_i^2$. Erzeugen Sie Verteilungen für $\tilde{S}_N = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} X_i^2$, analog zu Aufgabenteil ii.). Um die Verteilungen jeweils zur Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ vergleichen zu können verschieben Sie $\tilde{S}_N$ um den Mittelwert und teilen Sie durch die Standardabweichung. Welchen Unterschied können Sie im Vergleich zu iii.) erkennen? **(2 Pkt.)**

## Pflichttermin

Physikalisches Kolloquium am 27. November 2017 um 17 Uhr ct:
Prof. Dr. Peter Hänggi – *On the Use and Abuse of Thermodynamic Entropy.*

## Münsteraufgabe

Bischofskirchen haben zwei Türme. Freiburg ist Bischofssitz. Warum hat das Münster nur einen Turm?