Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

Aufgabenzettel Nr. 5

Abgabe am Freitag, den 17.11.17 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Zustandsgleichungen **(4 Pkt.)**

i.) Zeigen Sie, dass für ein Material mit volumenunabhängiger innerer Energie, d.h. $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = 0$, folgende thermische Zustandsgleichung gilt:

$$p(T, V) = T f(V)$$

Hinweis: Benutzen Sie $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$. **(2 Pkt.)**

ii.) Für ein Photonengas in einem Hohlraum mit Volumen V gilt:

$$\frac{U(T, V)}{V} = u(T), \quad p(T, V) = \frac{u(T)}{3}.$$

Welche T-Abhängigkeit ergibt sich für die Energiedichte $u(T)$? **(2 Pkt.)**

Aufgabe 2: Massenwirkungsgesetz **(4 Pkt.)**

Im Folgenden sollen chemische Reaktionen im thermodynamischen Gleichgewicht betrachtet werden. Eine allgemeine Formulierung der Reaktionsgleichungen mit n verschiedenen Stoffen A_i ist durch

$$\sum_i^n \nu_i A_i = 0$$

gegeben.

i.) Was sind die ν_i? Geben Sie diese für die Reaktionsgleichung $O_2 + 2H_2 \rightleftharpoons 2H_2O$ an. **(1 Pkt.)**

ii.) Im Gleichgewicht gilt $\sum_i^n \mu_i dN_i = 0$. Zeigen Sie, dass daraus folgt: $\sum_i^n \mu_i \nu_i = 0$. **(1 Pkt.)**

iii.) In der Vorlesung wurde das chemische Potential des idealen Gases hergeleitet (siehe Abschnitt 4.6). Zeigen Sie, dass sich dieses als $\mu = kT \log(\frac{N}{V}) + \chi(T)$ mit einer nur von T abhängigen Funktion χ schreiben lässt. Leiten Sie daraus das Massenwirkungsgesetz

$$\prod_i^n c_i^{\nu_i} = e^{-\frac{1}{kT}\sum \nu_i \chi_i(T)} \equiv K(T)$$

her, wobei $c_i = \frac{N_i}{V}$ die Konzentration des Stoffs A_i ist. **(2 Pkt.)**

Aufgabe 3: Gummiband **(6 Pkt.)**

Unter der Spannung t eines Gummibandes versteht man die zur (extensiven) Ausdehnung x konjugierte (intensive) Größe, d.h. $t = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_S$. Für ein konkretes Gummiband sei die Spannung t bei einer Temperatur T und Ausdehnung x durch

$$t = AT\left(\frac{x}{l_0} - \frac{l_0^2}{x^2}\right)$$

gegeben. Hierbei bezeichnet A eine Konstante und l_0 sei die Länge des ungedehnten Bandes. Für $x = l_0$ nehme die Wärmekapazität $c_x(T, x)$ den Wert c_0 an.

i.) Bestimmen Sie $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_T$, $\left(\frac{\partial c_x}{\partial x}\right)_T$, $c_x(T,x)$ und die innere Energie $U(T,x)$ als Funktionen von T und x. *Hinweis:* Vergleichen Sie die Differentiale $\mathrm{d}U$ und $\mathrm{d}S$ von $U(T,x)$ und der Entropie $S(T,x)$ und machen Sie sich die Symmetrie zweiter Ableitungen zunutze. **(4 Pkt.)**

ii.) Das Band werde adiabatisch von l_0 nach $x > l_0$ gedehnt. Die Anfangstemperatur sei T_0. Wie hoch ist die Endtemperatur und wie groß ist die benötigte Arbeit? **(2 Pkt.)**

Aufgabe 4: Legendre-Transformation **(6 Pkt.)**

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex und sei $f : U \to \mathbb{R}$ eine strikt konvexe glatte Funktion, u.a. ist die Matrix $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{ij}$ damit positiv definit an allen Punkten $x \in U$. Sei weiterhin $x \mapsto \nabla f(x)$ die Gradientenabbildung und $V = (\nabla f)(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ deren Bild.

i.) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x,p) = \langle x,p\rangle - f(x)$ für gegebenes $p \in V$ ein eindeutiges Maximum $x(p)$ hat. *Hinweis:* Hierbei könnte die Abschätzung

$$F(y,p) < F(x,p) + \langle \nabla_x F(x,p), y - x\rangle,$$

die für alle $p \in V$ und alle $x \neq y$ aus U gilt, helfen. **(2 Pkt.)**

Die Legendre-Transformierte von f, $\tilde{f} : V \to \mathbb{R}$, ist nun dadurch gegeben, dass die Funktion $F(x,p)$ jeweils am Maximum $x(p)$ ausgewertet wird, d.h.

$$\tilde{f}(p) = \langle p, x(p)\rangle - f\big(x(p)\big).$$

ii.) Zeigen Sie die Young'sche Ungleichung

$$f(x) + \tilde{f}(p) \geq \langle x,p\rangle.$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen? **(2 Pkt.)**

iii.) Die Legendre-Transformierte ist selbst wieder strikt konvex. Zeigen Sie, dass $\tilde{\tilde{f}} = f$ gilt. **(1 Pkt.)**

iv.) Berechnen Sie die Legendre-Transformation der folgenden Funktionen

(a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ für $x \in \mathbb{R}$

(b) $f(x) = \frac{1}{\alpha}x^\alpha$ für $x \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha > 1$

Welche (bekannten) Ungleichungen ergeben sich in diesen Beispielen aus der Young'schen Ungleichung? **(1 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Warum ist der Münsterturm unten vier- und oben achteckig?