Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

Aufgabenzettel Nr. 4

Abgabe am Freitag, den 10.11.17 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Wärmekraftmaschine **(4 Pkt.)**

Betrachten Sie eine Wärmekraftmaschine mit zwei Wärmereservoirs, die beide die gleiche temperaturunabhängige Wärmekapazität c haben. Die Anfangstemperaturen betragen T_1 und T_2 mit $T_2 > T_1$ und die Maschine arbeitet bis sich in beiden Reservoirs die Endtemperatur T_3 einstellt.

i.) Zeigen Sie, dass $T_3 \geq \sqrt{T_1 T_2}$, indem Sie die Änderung der Gesamtentropie bestimmen. **(2 Pkt.)**

ii.) Wie groß ist die maximale Arbeit, die von der Maschine geleistet werden kann? **(2 Pkt.)**

Aufgabe 2: Carnotprozess **(4 Pkt.)**

Im Carnot'schen Kreisprozess wird der Wirkungsgrad $\eta_C = 1 - \frac{T_l}{T_h}$ erreicht (siehe Vorlesung).

i.) Zeigen Sie, dass der Wirkungsgrad eines beliebigen Kreisprozesses mit extremalen Temperaturen T_l und T_h immer kleiner oder höchstens gleich η_C ist. *Hinweis:* Betrachten Sie den Prozess im T-S-Diagramm. **(2 Pkt.)**

ii.) Wie baut man aus zwei Isothermen und zwei Adiabaten einen idealen Kühlschrank? **(2 Pkt.)**

Aufgabe 3: Wärmekapazitäten **(5 Pkt.)**

Die Wärmekapazität bei Konstanthalten einer beliebigen Zustandsvariablen z ist über die Gleichung

$$\delta Q = C_z(T, z)\, \mathrm{d}T$$

definiert.

i.) Zeigen Sie mithilfe der thermodynamischen Entropie, $\mathrm{d}S = \frac{\delta Q}{T}$, dass die Beziehung $C_z = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_z$ gilt. **(1 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie, dass

$$C_p = C_V + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

gilt. Machen Sie sich hierfür klar, dass $S(T,p) := S\big(T, V(T,p)\big)$ ist und nutzen Sie die Relation $\frac{\partial S}{\partial V}\big|_T = \frac{\partial p}{\partial T}\Big|_V$. **(2 Pkt.)**

iii.) Zeigen Sie, dass

$$C_p - C_V = TV\frac{\alpha^2}{\kappa}$$

gilt, wobei $\alpha := \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ den Ausdehnungskoeffizient und $\kappa := -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ die isotherme Kompressibilität bezeichnen. **(2 Pkt.)**

Aufgabe 4: Innere Energie des Van-der-Waals-Gases **(5 Pkt.)**

Das Van-der-Waals-Gas genügt der Zustandsgleichung

$$\left(p + \left(\frac{N}{V}\right)^2 a\right)(V - Nb) = NkT.$$

Berechnen Sie die innere Energie $U(T - T_0, V - V_0)$ bezogen auf einen Referenzpunkt (T_0, V_0) und unter der Annahme, dass C_V konstant ist.

i.) Bestimmen Sie zunächst das totale Differential $\mathrm{d}U = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \mathrm{d}T + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T \mathrm{d}V$ für das Van-der-Waals-Gas unter Zuhilfenahme der Relation $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$, vgl. Aufgabe 3. **(2 Pkt.)**

ii.) Nutzen Sie die Tatsache, dass es sich bei $\mathrm{d}U$ um ein totales Differential handelt, um $U(T, V)$ zu berechnen. **(2 Pkt.)**

iii.) Wie erklären Sie sich die V-Abhängigkeit von $U(V, T)$? **(1 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Wie erklärt sich der berühmteste Wasserspeier des Münsters?