

Selbstorganisierte Kritizität

Moritz Gerstung

Fakultät für Mathematik und Physik
Albert-Ludwigs-Universität Freiburg

Studenten Seminar: Dynamische Modelle komplexer Systeme

Selbstorganisierte Kritizität

- “Selbstgeordnete Instabilität”
- Englisch: *Self-Organized Criticality* (SOC).
- Eingeführt von P. Bak, C. Tang und K. Wiesenfeld in Phys. Rev. Lett. 59(4), 1987.
- Großer Boom Anfang der 90er.

① Einführung

Zwei einfache Beispiele

② Sandhaufen-Modell

1D

2D

Theoretische Analyse

③ Kritizität und die reale Welt

Lawinen

Waldbrände und Erdbeben

Ausblick

① Einführung

Zwei einfache Beispiele

② Sandhaufen-Modell

1D

2D

Theoretische Analyse

③ Kritizität und die reale Welt

Lawinen

Waldbrände und Erdbeben

Ausblick

① Einführung

Zwei einfache Beispiele

② Sandhaufen-Modell

1D

2D

Theoretische Analyse

③ Kritizität und die reale Welt

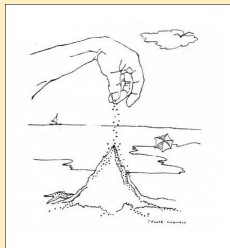
Lawinen

Waldbrände und Erdbeben

Ausblick

- ① Einführung
 - Zwei einfache Beispiele
- ② Sandhaufen-Modell
 - 1D
 - 2D
 - Theoretische Analyse
- ③ Kritizität und die reale Welt
 - Lawinen
 - Waldbrände und Erdbeben
 - Ausblick

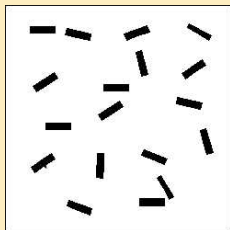
Betrachte Sandhaufen, auf den Sandkörner mit Rate r gerieselt werden.



Beobachtungen

- Nach Übersteigen einer *kritischen* Steigung entsteht eine Lawine.
- Dies wiederholt sich (*Selbsorganisation*).
- Es entstehen Lawinen aller Größenordnungen.

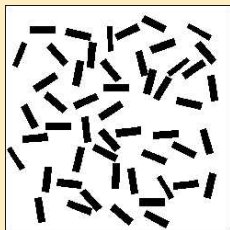
Betrachte zufällig verteilte Dominosteine mit Dichte σ .
Ein Stein wird zufällig angestoßen \Rightarrow Lawine.



3 Fälle

- 1 $\sigma \ll \sigma_c$: Subkritisch, nur lokale Auswirkungen.
- 2 $\sigma \gg \sigma_c$: Superkritisch, immer katastrophale Auswirkungen.
- 3 $\sigma \approx \sigma_c$: Kritisch, Lawinen aller Größenordnungen möglich.

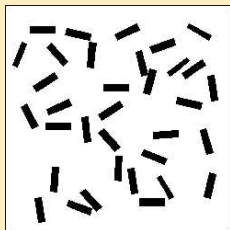
Betrachte zufällig verteilte Dominosteine mit Dichte σ .
Ein Stein wird zufällig angestoßen \Rightarrow Lawine.



3 Fälle

- 1 $\sigma \ll \sigma_c$: Subkritisch, nur lokale Auswirkungen.
- 2 $\sigma \gg \sigma_c$: Superkritisch, immer katastrophale Auswirkungen.
- 3 $\sigma \approx \sigma_c$: Kritisch, Lawinen aller Größenordnungen möglich.

Betrachte zufällig verteilte Dominosteine mit Dichte σ .
Ein Stein wird zufällig angestoßen \Rightarrow Lawine.



3 Fälle

- 1 $\sigma \ll \sigma_c$: Subkritisch, nur lokale Auswirkungen.
- 2 $\sigma \gg \sigma_c$: Superkritisch, immer katastrophale Auswirkungen.
- 3 $\sigma \approx \sigma_c$: Kritisch, Lawinen aller Größenordnungen möglich.

Definition

Selbstorganisierte Kritizität beschreibt die Dynamik von komplexen, dissipativen Systemen an der Grenze der Instabilität bei langsamen Antrieb.

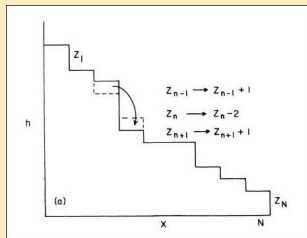
- Antrieb in Richtung der Instabilität (Sisyphos).
- *Langsam* im Vergleich zum Kollaps.
- Dominoartiger Kopplungsmechanismus.

- 1 Einführung
 - Zwei einfache Beispiele
- 2 Sandhaufen-Modell
 - 1D
 - 2D
 - Theoretische Analyse
- 3 Kritizität und die reale Welt
 - Lawinen
 - Waldbrände und Erdbeben
 - Ausblick

Eindimensionales Modell

Bak, Tang, Weisenfeld

- Es gibt N benachbarte Plätze, mit jeweils h_i Sandkörnern.
- Steigung $z_i = h_i - h_{i+1}$.
- An der Stelle N können Körner herausfallen.



Dynamik

- 1 Körner ($\delta h = 1$) werden zufällig an Stelle i hinzugefügt.
- 2 Wenn $z_i > z_c$ fällt ein Korn von i nach $i + 1$.
- 3 Wiederhole 2 bis Gleichgewicht, dann 1.

Bak, Tang, Weisenfeld

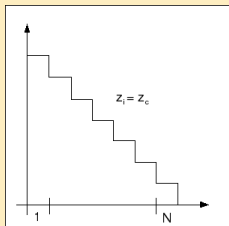
-
- (a)
- $Z_{n-1} \rightarrow Z_{n-1} + 1$
 $Z_n \rightarrow Z_n - 2$
 $Z_{n+1} \rightarrow Z_{n+1} + 1$

- 1 Körner ($\delta h = 1$) werden zufällig an Stelle i hinzugefügt.
- 2 Wenn $z_i > z_c$ fällt ein Korn von i nach $i + 1$.
- 3 Wiederhole 2 bis Gleichgewicht, dann 1.

Ergebnisse der Simulation

Minimale Stabilität in einer Dimension

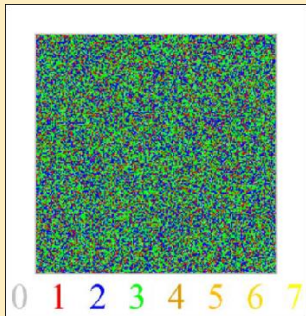
Beobachtungen



- Nach “Einschwingen” entsteht *immer* der *minimalstabile* Zustand mit $z_i = z_c$.
- Dynamik trivial:
 - Lawinen bestehen immer aus nur einem Sandkorn.
 - Länge der Lawine (= Gesamtzahl von Übergängen) hängt nur vom Auslöschungspunkt ab.
 - Spektrum weiß.
- Grund: Nur *ein* räumlicher Freiheitsgrad.

Erweiterung auf zwei Dimensionen

Hinzufügen von räumlichen Freiheitsgraden



Dynamik

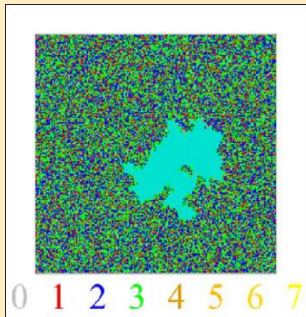
- Quadratische Grundfläche mit offenen Rändern.
- Mehr Freiheitsgrade:
4 nächste Nachbarn (NN).
- Wenn $z_i > z_c$:

$$z_i \mapsto z_i - 4$$

$$z_{NN} \mapsto z_{NN} + 1$$

Erweiterung auf zwei Dimensionen

Hinzufügen von räumlichen Freiheitsgraden



Dynamik

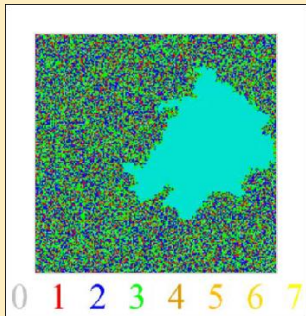
- Quadratische Grundfläche mit offenen Rändern.
- Mehr Freiheitsgrade:
4 nächste Nachbarn (NN).
- Wenn $z_i > z_c$:

$$z_i \mapsto z_i - 4$$

$$z_{NN} \mapsto z_{NN} + 1$$

Erweiterung auf zwei Dimensionen

Hinzufügen von räumlichen Freiheitsgraden



Dynamik

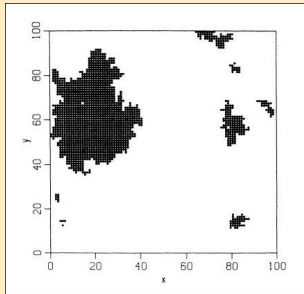
- Quadratische Grundfläche mit offenen Rändern.
- Mehr Freiheitsgrade:
4 nächste Nachbarn (NN).
- Wenn $z_i > z_c$:

$$z_i \mapsto z_i - 4$$

$$z_{NN} \mapsto z_{NN} + 1$$

Lawinengrößen

Ergebnisse der numerischen Simulation für 2D

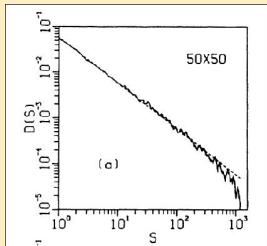


Beobachtungen

- Stationärer Prozess:
Langsamer Aufbau \rightleftharpoons Lawine
- Lawinen auf allen
Längenskalen.
- Exponentielles Anwachsen
der Signale ermöglicht durch
räumliche Freiheitsgrade.

Verteilung der Lawinengrößen

Ergebnisse der numerischen Simulation für 2D und 3D



Beobachtungen

- Häufigkeit von Lawinen der Größe S :

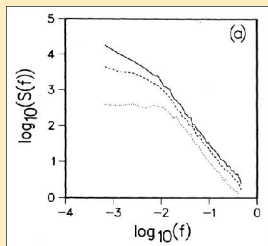
$$D(S) \sim S^{-\tau}$$

- $\tau \approx 0.98$
- Potenzgesetz \Leftrightarrow Skaleninvarianz

Spektrum

Frage: Wie sieht die Überlagerung der Signale vieler Sandhaufen aus?

Ursprüngliches Ziel (Bak): Erkläre $1/f$ -Rauschen.



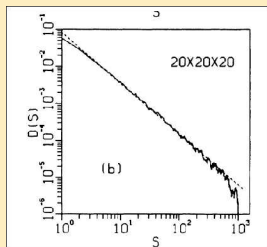
Vorgehen

- Stochastische Überlagerung der Lawinensignale.
- Gewichte mit der gemessenen Häufigkeitsverteilung $D(S, T)$.
- Spektrum $S(f) \sim 1/f^2$.

Dreidimensionales Modell: 6 nächste Nachbarn

Transport:

$$z_i \mapsto z_i - 6, \quad z_{NN} \mapsto z_{NN} + 1.$$



- Mehr Freiheitsgrade.
- Qualitativ gleiches Verhalten:
 $D(S) \sim S^{-\tau}.$
- Andere Exponenten, $\tau \approx 1.35$
(2D: $\tau \approx 0.98$)

Definition (Konfiguration)

- Definiere Konfiguration $C = \{z_i\}$
- Menge aller Konfigurationen $\mathcal{C} = \{C\}$.

Bemerkung

- Eine Konfiguration C ist eine Realisierung des Sandhaufens.
- Die Menge aller möglichen Realisierungen bildet den Konfigurationsraum \mathcal{C} .

Umfalloperator

Definition (Umfalloperator)

Umfalloperator $U_i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, $z_j \longmapsto \begin{cases} z_j - \Delta_{ij} & z_i > z_c \\ z_j & \text{sonst} \end{cases}$,

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 4 & j = i \\ -1 & j = NN \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Bemerkung

Relaxation: Anwendung von U bis alle $z_j < z_c$.

Definition (Additionsoperator)

Additionsoperator $a_i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, $z_i \longmapsto z_i + 1$, anschließend Relaxation

Bemerkung

Der Additionsoperator a_i entspricht dem Hinzufügen eines Sandkorns an die Stelle i bei gegebener Konfiguration.

Lemma

Lemma

Die Additionsooperatoren kommutieren: $[a_i, a_j] = 0$.

Bemerkung

Man darf die Reihenfolge von Addition vertauschen (trotz Lawinen).

Definition

Rekurrente Zustände $\mathcal{R} = \{C \mid \forall i \exists m_i : a_i^{m_i} C = C\} \subset \mathcal{C}$

Folgerung

Die Menge der erlaubten Konfigurationen zerfällt in transiente und rekurrente Zustände $\mathcal{C} = \mathcal{T} \cup \mathcal{R}$. Die Menge der transienten Zustände wird durch Anwendung der a_i verlassen. Anschließend verbleibt das System dort.

Satz

$a_i|_{\mathcal{R}}$ invertierbar.

Bemerkung

Zu jedem Zustand $C \in \mathcal{R}$ gibt es *genau einen* Zustand C' aus dem C durch Addition an der Stelle i hervorgegangen ist.

Folgerung

Unter der Entwicklung der a_i sind alle Zustände $C_R \in \mathcal{R}$ gleichwahrscheinlich.

Definition

Der selbstorganisierte kritische Zustand (des gegebenen Modells) ist die Menge der rekurrenten Zustände \mathcal{R} . Dabei sind unter der Zeitentwicklung des System alle Konfigurationen $C_R \in \mathcal{R}$ gleichwahrscheinlich.

Zusammenfassung BTW-Sandhaufen-Modell

BTW Modell ist einfaches, symmetrisches Modell der Ausbreitung einer Größe z .

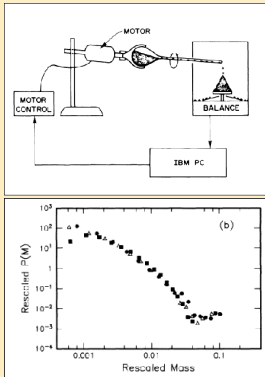
- Modell getrieben (Hinzufügen von Sandkörnern) und dissipativ.
- Stabilisierung um kritischen Wert, alle Konfigurationen gleichwahrscheinlich.
- Ausbreitung der Signale in Lawinen.
- Verteilung $D(S) \sim S^{-\tau}$, keine Längenskala, Fraktale.
- Spektrum $S(f) \sim 1/f^\alpha$.

- 1 Einführung
Zwei einfache Beispiele
- 2 Sandhaufen-Modell
1D
2D
Theoretische Analyse
- 3 Kritizität und die reale Welt
Lawinen
Waldbrände und Erdbeben
Ausblick

Sandhaufen

Held *et al.*, Phys. Rev. Lett., 65(9), 1990.

Körner werden einzeln abgelegt, Lawinen als *Massenverlust* gemessen.



Beobachtungen

Für kleine Haufen ($d \leq 1.5\text{in.}$)
selbsorganisiert kritische Phänomene:

- Invarianz gegen Änderung der Haufengröße.
- Spektrum $f(S) \sim 1/f^2$.

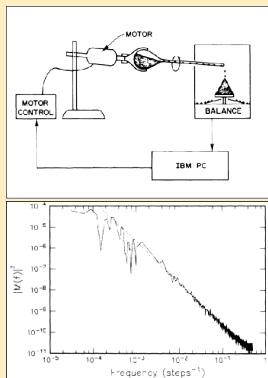
Nicht aber für große Haufen, $d \geq 3\text{in.}$:

- Große, periodische Lawinen.
- Ursache unklar.

Sandhaufen

Held *et al.*, Phys. Rev. Lett., 65(9), 1990.

Körner werden einzeln abgelegt, Lawinen als *Massenverlust* gemessen.



Beobachtungen

Für kleine Haufen ($d \leq 1.5\text{in.}$)
selbsorganisiert kritische Phänomene:

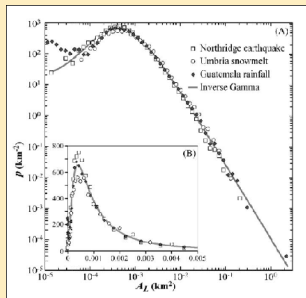
- Invarianz gegen Änderung der Haufengröße.
- Spektrum $f(S) \sim 1/f^2$.

Nicht aber für große Haufen, $d \geq 3\text{in.}$:

- Große, periodische Lawinen.
- Ursache unklar.

Ursachen: Erbeben, Schneeschmelze und Regen

Messdaten

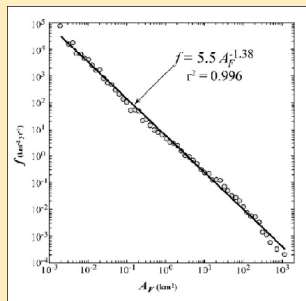


- Beobachtete Häufigkeitsverteilung kein einfaches Potenzgesetz.
- Robust gegenüber Ursache.
- Dynamik kompliziert.

Modell

- Feuer $\simeq z$ breitet sich auf Nachbarn aus.
- Bäume wachsen nach.

Messdaten

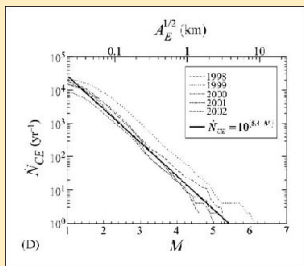


- Häufigkeitsverteilung
Potenzgesetz: $D(A) \approx A^{-\alpha}$,
 $\alpha = 1.38$
- Modellparameter:
 $\alpha_{\text{sim}} = 1.0 - 1.3$

Modell

- Scherspannung greift an Platte an.
- Einzelne Elemente werden mit Federn gehalten, Spannung z_i .

Messdaten



- Gutenberg-Richter (empirisch):
 $\log \dot{N}_{CE} = -bM + \log \dot{a}$
- $\alpha_{\text{mess}} = 1.8 - 2.2 \neq \alpha_{\text{sim}} = 1.0 - 1.5$
- “Beweis”, dass Erdbeben keine SOC Phänomen sind durch Umordnen der gemessenen Zeitreihen

Selbstorganisierte Kritizität ist allgegenwärtig.

- Ökonomie
- Physik
 - Barkhausen Effekt
 - Magnetfluss in high-T Supraleitern
 - Fluidstrom in porösen Medien
- ...
- Geologie
 - Erdrutsche
 - Erdbeben
 - Waldbrände
- Biologie
 - Evolution
 - Neuronale Netze

SOC ist ein Transportphänomen in komplexen Systemen.




Zusammenfassung

Zusammenfassung

- SOC allgemeines Transportphänomen.
- Erklärungsansatz für
 - Verteilungen mit Potenzabhängigkeit $D(S) \sim S^{-\tau}$
 - $1/f^\alpha$ -Rauschen
- Parameter τ , α hängen vom Modell ab.
- Natur noch etwas komplizierter.

Ausblick

- Sandhaufen: Abelscher Sandhaufen, Manna Sandhaufen, Oslo Reishaufen ...
- Rapid SOC, ...

-  BAK, P., C. TANG und K. WIESENFELD: *Self-organized criticality*.
Phys. Rev. A, 38(1):384, 1988.
-  DHAR, D.: *Exactly Solved Model of Self-Organized Critical Phenomena*.
Phys. Rev. Lett., 63(16):1659, 1989.
-  TURCOTTE, D.L. und B.D. MALAMUD: *Landslides, forest fires and earthquakes: Examples of self-organized critical behavior*.
Physica A, 340:580–589, 2004.