Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

Aufgabenzettel Nr. 13

Abgabe am Freitag, den 26.1.18 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Energie und Wärmekapazität des Zweiteilchengases **(7 Pkt.)**

Betrachten Sie zwei freie Teilchen, die in einem Würfel der Kantenlänge L eingeschlossen sind. Der Hamiltonoperator des Systems lautet dann

$$H = \sum_{i=1}^{2} H_i = \sum_{i=1}^{2} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_i \right)$$

mit dem Laplace-Operator Δ_i für das i-te Teilchen. Die Einteilchen-Eigenvektoren $|\vec{k}_i\rangle$ erfüllen die stationäre Schrödingergleichung

$$H_i \, |\vec{k}_i\rangle = \frac{\hbar^2}{2m} \vec{k}_i^2 \, |\vec{k}_i\rangle \, .$$

i.) Wie lauten die möglichen Zustände $|\vec{k}_1, \vec{k}_2\rangle$, die das System im Falle zweier Bosonen bzw. zweier Fermionen annehmen kann? **(2 Pkt.)**

ii.) Berechnen Sie die kanonische (Zweiteilchen)-Zustandssumme $Z_S(m, N=2)$ für die drei Fälle $S = \text{BE}$ (Bose-Einstein), $S = \text{FD}$ (Fermi-Dirac) und $S = \text{MB}$ (Maxwell-Boltzmann-Statistik) und drücken Sie diese durch die Einteilchenzustandssumme $Z_S(m, 1)$ aus. **(2 Pkt.)**

Zwischenergebnis:

$$Z_{\text{FD}} = \frac{1}{2} \left[Z^2(m,1) - Z\big(\frac{m}{2},1\big) \right] \qquad Z_{\text{BE}} = \frac{1}{2} \left[Z^2(m,1) + Z\big(\frac{m}{2},1\big) \right] \qquad Z_{\text{MB}} = \frac{1}{2} Z^2(m,1)$$

iii.) Nutzen Sie die klassische Approximation der Einteilchenzustandssumme, $Z_{\text{MB}}(m,1) = \frac{V}{\lambda(m)^3}$ mit der thermischen Wellenlänge $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}$, und berechnen Sie die Korrekturen ΔE zur Energie und ΔC_V zur Wärmekapazität im Falle von Bosonen bzw. Fermionen. *Hinweis:* Machen Sie sich für die Berechnung von $\ln Z_{\text{FD}}$ und $\ln Z_{\text{BE}}$ zunutze, dass der Quotient aus quantenmechanischer Korrektur und klassischer Approximation der Zustandssumme klein ist. **(2 Pkt.)**

iv.) Ab welcher Temperatur bricht die Näherung, die der Reihenentwicklung in Teil iii.) zugrunde liegt, zusammen? **(1 Pkt.)**

Aufgabe 2: Zustandsdichte des Bose-Gases **(3 Pkt.)**

Betrachten Sie ein ideales Gas aus Bosonen mit der Energie $\epsilon = \frac{p^2}{2m}$ und Spin 0. Die mittlere Anzahl der Teilchen im Energieintervall $[\epsilon, \epsilon + \mathrm{d}\epsilon]$ ist

$$\mathrm{d}N(\epsilon) = n(\epsilon)\rho(\epsilon)\mathrm{d}\epsilon \tag{1}$$

mit der mittleren (bosonischen) Teilchenzahl $n(\epsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon-\mu)}-1}$ und der Energiezustandsdichte $\rho(\epsilon)$ zur Energie ϵ. Bestimmen Sie $\rho(\epsilon)$ und $\mathrm{d}N(\epsilon)$ für das ideale Bosegas.

Aufgabe 3: Zweidimensionales Elektronengas **(7 Pkt.)**

Betrachten Sie ein zweidimensionales, ideales Elektronengas in einer Ebene der Fläche A. Ein solches System ist z.B. durch die Valenzelektronen einer metallischen Schicht realisiert.

i.) Berechnen Sie die Zustandsdichte $n(\epsilon)\rho(\epsilon)$, vgl. Gleichung (1), des zweidimensionalen Fermi-Gases. **(1 Pkt.)**

ii.) Zeigen Sie, dass die mittlere Energie $\langle E \rangle$ durch

$$\langle E \rangle = \frac{2\pi A}{mh^2} \underbrace{\int \frac{p^3}{1 + e^{-\beta(\mu - \epsilon(p))}} \mathrm{d}p}_{=: I(\mu)}$$

gegeben ist. Zeigen Sie weiter, dass sich das großkanonische Potential $\Phi = -\frac{1}{\beta} \ln Y$ im Kontinuumslimes, $\sum_i \to \frac{1}{h^{Nd}} \int \mathrm{d}^{Nd}x \mathrm{d}^{Nd}p$, als

$$\Phi = -\frac{4\pi A}{\beta h^2} \int p \ln\left(1 + e^{\beta(\mu - \epsilon(p))}\right) \mathrm{d}p$$

schreiben lässt. Unter welcher Bedingung ist der Kontinuumslimes möglich? **(3 Pkt.)**

iii.) Wie hängen Φ und $I(\mu)$ zusammen? Nutzen Sie diesen Zusammenhang sowie die Euler-Gleichung, um die kalorische Zustandsgleichung des Gases zu bestimmen. **(3 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Wie steht das Münster mit dem Symposion von Platon in Zusammenhhang? Studieren Sie dazu die Apokalypse des Johannes und die Schriften von Proklos, Plotin und des Abtes Suger von St. Denis.