Theoretische Physik IV: Statistische Physik

(Vorlesung Prof. Dr. J. Timmer, WS 2017/18)

Aufgabenzettel Nr. 12

Abgabe am Freitag, den 19.1.18 nach der Vorlesung. Bitte mehrere Blätter zusammentackern und mit Gruppennummer, Name des Tutors und Ihrem Namen deutlich lesbar beschriften.

Aufgabe 1: Ultrarelativistisches Gas **(5 Pkt.)**

Das ultrarelativistische Gas zeichnet sich dadurch aus, dass die Ruheenergie eines Teilchens gegenüber seiner kinetischen Energie vernachlässigbar ist. Daraus ergibt sich für die Hamiltonfunktion

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i(\vec{q}_i, \vec{p}_i) = \sum_{i=1}^{N} |\vec{p}_i| c$$

mit den relativistischen Teilchenimpulsen $\vec{p}_i$ und der Lichtgeschwindigkeit c.

i.) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme durch $Z(T, V, N) = \frac{1}{N!}\left[8\pi V \left(\frac{kT}{hc}\right)^3\right]^N$ gegeben ist. *Hinweis:* $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\mathrm{d}x = 2$. **(3 Pkt.)**

ii.) Bestimmen Sie den Druck $p(T, V, N)$ und zeigen Sie, dass die ideale Gasgleichung $pV = NkT$ auch für das ultrarelativistische Gas gilt. **(1 Pkt.)**

iii.) Berechnen Sie die innere Energie $U(T, V, N)$ und damit die kalorische Zustandsgleichung des ultrarelativistischen Gases. **(1 Pkt.)**

Aufgabe 2: Rotationsfreiheitsgrade des Molekülgases **(4 Pkt.)**

In der Vorlesung wurde für ein ideales Gas aus Molekülen gezeigt, dass die Zustandssumme $Z = Z_{\text{trans}} Z_{\text{vib}} Z_{\text{rot}} Z_{\text{el}}$ in einen Translations-, Vibrations-, Rotations- sowie einen Anteil der Elektronenanregung faktorisiert. Der Rotationsanteil ist $Z_{\text{rot}}(T, N) = z_{\text{rot}}(T)^N$ mit

$$z_{\text{rot}} = \sum_{J=0}^{\infty} (2J+1) e^{-\beta \frac{\hbar^2 J(J+1)}{2I}}.$$

i.) Berechnen Sie den Rotationsbeitrag $E_{\text{rot}}(T, N)$ zur Gesamtenergie und den Beitrag C_{rot} zur Gesamtwärmekapazität im Limes kleiner Temperaturen $T \ll T_{\text{rot}} = \frac{\hbar^2}{I k_B}$. *Hinweis:* Taylor-Entwicklung. **(3 Pkt.)**

ii.) Skizzieren Sie den Temperaturverlauf von C_{rot} für $T < T_{\text{rot}}$ und $T > T_{\text{rot}}$ und argumentieren Sie hierbei mit dem Gleichverteilungssatz. **(1 Pkt.)**

Aufgabe 3: Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen im Magnetfeld **(11 Pkt.)**

Ein System bestehe aus N Dipolen, im folgenden als Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen beschrieben, die sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ befinden. Gehen Sie zunächst von nicht wechselwirkenden Teilchen aus, womit der Hamiltonoperator durch

$$H_0 = \sum_{i=1}^{N} H_i = -\sum_{i=1}^{N} \vec{m}_i \vec{B}$$

gegeben ist. Dabei ist das magnetische Moment $\vec{m}_i = \mu_B \vec{\sigma}^{(i)}$ durch das Bohr'sche Mageton μ_B und die Pauli-Matrizen $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ ausgedrückt.

i.) Zeigen Sie, dass die kanonische Zustandssumme durch $Z(T,N) = (2\cosh(\beta\mu_B B))^N$ gegeben ist. Geben Sie zudem $F(T,N)$, $S(T,N)$ und $E(T,N)$ an. Welche Ausdrücke für Z, F, S und E ergeben sich für die Grenzfälle $\mu_B B/k_B T \ll 1$ und $\mu_B B/k_B T \gg 1$? **(3 Pkt.)**

ii.) Bestimmen Sie die Magnetisierung $M = -\frac{\partial F}{\partial B}$ und die isotherme, magnetische Suszeptibilität $\chi(T,B) = \frac{\partial M}{\partial B}$. Verifizieren Sie das Curie-Gesetz $\chi(T, B=0) \propto \frac{1}{T}$. Zeigen Sie zudem, dass sich die Magnetisierung auch durch $M = \mu_B \sum_{i=1}^{N} \langle \sigma_z^{(i)} \rangle$ ausdrücken lässt. **(3 Pkt.)**

Gehen Sie nun von einem wechselwirkenden System mit

$$H = H_0 + J \sum_{k=1}^{N/2} \sigma_z^{(2k-1)} \sigma_z^{(2k)}$$

aus, wobei J eine Konstante ist. Nehmen Sie an, dass N gerade ist.

iii.) Zeigen Sie, dass $Z(T,N) = \left(2\cosh(2\beta\mu_B B)e^{-\beta J} + 2e^{\beta J}\right)^{N/2}$ gilt. Überlegen Sie sich hierzu zunächst, dass das System aus Spinpaaren besteht, die nicht miteinander wechselwirken und bestimmen Sie den Hamiltonoperator eines Spinpaares. **(2 Pkt.)**

iv.) Bestimmen Sie $F(T,N)$ und $M(T,B)$. **(1 Pkt.)**

v.) Bestimmen Sie die magnetische Suszeptibilität $\chi(T,B)$. Geben Sie den Limes für $B \to 0$ an und bestimmen Sie $\chi(T,0)$ sowohl für hohe als auch niedrige Temperaturen im Vergleich zur Kopplungskonstanten J (d.h. $J \ll k_B T$ und $J \gg k_B T$). *Hinweis:* Diskutieren Sie die Grenzfälle separat für $J = 0$, $J > 0$ und $J < 0$. **(2 Pkt.)**

Münsteraufgabe

Am westlichen Eingangsportal sind geometrische Figuren in den Stein geritzt. Was bedeuten diese?